

## BÀI TẬP MẪU TUẦN 3

### MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

#### Dạng 1: Phương trình thuần nhất

**Bài 1:** Giải phương trình  $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = 2$ .

#### Hướng dẫn giải

Ta có  $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = 2$ .

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \cos 3x = 1 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin 3x - \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos 3x = 1 \Leftrightarrow \sin \left( 3x - \frac{\pi}{6} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm

$$x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

**Bài 2:** Phương trình  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$  có nghiệm là

**A.** 
$$\begin{cases} x = -\pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**B.** 
$$\begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**C.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**D.** 
$$\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Hướng dẫn giải:** Ta có  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Bài 3:** Phương trình  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$  có nghiệm âm lớn nhất bằng

**A.**  $\frac{-\pi}{3}$ .

**B.**  $\frac{-\pi}{6}$ .

**C.**  $\frac{-5\pi}{6}$ .

**D.**  $\frac{-5\pi}{3}$ .

**Hướng dẫn giải:**

Phương trình  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Ta

có

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Vậy phương trình có nghiệm âm lớn nhất  $x = -\frac{\pi}{3}$  là với  $k = 0$ .

**Bài 4:** Nghiệm của phương trình  $\sin x + \cos x = 1$  là

**A.**  $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**B.**  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**C.**  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**D.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Hướng dẫn giải:**

Phương trình  $\sin x + \cos x = 1$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Dạng 2: Phương trình bậc 2 của một hàm số lượng giác**

**Bài 1:** Giải phương trình  $2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0$ .

**Hướng dẫn giải:**

Đặt  $t = \sin x$ , điều kiện  $|t| \leq 1$ .

Phương trình đã cho trở thành

$$2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện  $|t| \leq 1$  ta được  $t = 1$ .

Với  $t=1$  thì  $\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

Vậy phương trình đã cho có nghiệm

$$x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

**Bài 2.** Giải phương trình  $3\sin^2 2x+7\cos 2x-3=0$ .

**Hướng dẫn giải:**

$$\text{Ta có } 3\sin^2 2x+7\cos 2x-3=0 \Leftrightarrow 3(1-\cos^2 2x)+7\cos 2x-3=0$$

$$\Leftrightarrow 3\cos^2 2x-7\cos 2x=0 \Leftrightarrow \cos 2x(3\cos 2x-7)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x=0 \\ 3\cos 2x-7=0 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1: } \cos 2x=0 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Trường hợp 2: } 3\cos 2x-7=0 \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{7}{3}>1(\text{loại}).$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có nghiệm } x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

**Bài 3:** Nghiệm của phương trình  $\tan^2 x+2\tan x+1=0$  là

- A.  $\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .      B.  $-\frac{\pi}{4}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .      C.  $\frac{\pi}{2}+k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .      D.  $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Hướng dẫn giải:**

$$\text{Phương trình } \tan^2 x+2\tan x+1=0 \text{ có nghĩa } \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi.$$

$$\text{Đặt } t=\tan x. \text{ Ta có } \tan^2 x+2\tan x+1=0 \Leftrightarrow t^2+2t+1=0 \Leftrightarrow t=-1.$$

$$\text{Với } t=-1, \text{ ta có } \tan x=-1 \Leftrightarrow \tan x=\tan\frac{-\pi}{4} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

**Bài 4:** Với  $k \in \mathbb{Z}$ , phương trình  $\cos^2 x+2\cos x-3=0$  có nghiệm là

- A.  $x=k2\pi$ .      B.  $x=0$ .      C.  $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ .      D. Vô nghiệm.

**Hướng dẫn giải:**

$$\text{Phương trình } \cos^2 x+2\cos x-3=0 \text{ có nghĩa } \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D=\mathbb{R}.$$

Đặt  $t = \cos x, |t| \leq 1$ . Ta có  $\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$  (do  $|t| \leq 1$

).

Với  $t = 1$ , ta có  $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

### Dạng 3: Phương trình lượng giác đẳng cấp

**Câu 1:** Phương trình  $\cos^2 x - 3\sin x \cos x - 2\sin^2 x = 1$  có nghiệm là

**A.**  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**B.**

$\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**C.**  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

**D.**  $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{-\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

### Hướng dẫn giải:

Phương trình  $\cos^2 x - 3\sin x \cos x - 2\sin^2 x = 1$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = \mathbb{R}$ .

Với  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  phương trình vô nghiệm.

Với  $\cos x \neq 0$ . Chia cả hai vế của phương trình cho  $\cos^2 x$  ta được

$$\cos^2 x - 3\sin x \cos x - 2\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow 1 - 3\tan x - 2\tan^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x + \tan x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$